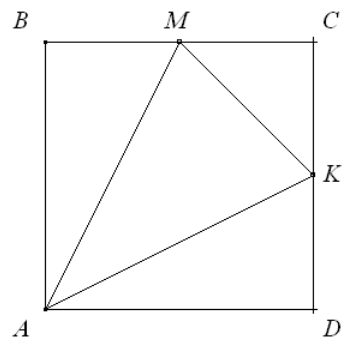
IX Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»
VIII Южный математический турнир.
Старт-лига. 1 тур. 18 сентября 2013 года.
***Решения*.**

1. Число представлено как сумма 1000 различных нечётных положительных слагаемых. Докажите, что его можно представить как сумму 333 различных чётных положительных слагаемых.

Решение: Например, поступим следующим образом. Упорядочим исходные 1000 различных нечётных положительных чисел по возрастанию. Объединим эти нечётные числа парами подряд в их суммы и получим 500 новых чётных положительных чисел по возрастанию. После этого 332 меньших из них оставим, а остальные 168 объединим в их сумму – одно чётное положительное число, заведомо большее всех остальных 332-х чётных чисел.

2. На границе квадрата отметили три точки, соединили их отрезками, и по ним разрезали. В результате квадрат распался на 4 треугольника. Какое наибольшее число из этих треугольников могут оказаться равными?

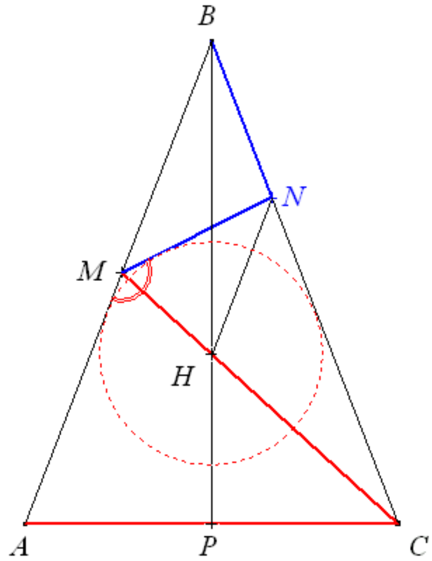
Ответ: 2 треугольника. ***Решение:*** Если бы на какой-то стороне квадрата ($ABCD$) или в её концах не было отмеченных точек, то эта сторона вошла бы в четырёхугольную или пятиугольную часть. Значит, *три* отмеченные точки лежат на четырёх сторонах, то есть, какая-то из точек попала в вершину квадрата, можно считать, что A (см. рис.). Тогда две остальные точки могли попасть только на стороны BC и CD. Если картинка симметрична относительно диагонали AC, то треугольники ABM и ADK равны. Докажем, что более двух равных треугольников быть не может. Средний треугольник AMK не может быть равен крайнему, т.к. в нём хотя бы 2 стороны (AM и AK) больше стороны квадрата, а у крайнего такая сторона максимум одна – гипотенуза. Кроме того, крайний треугольник MCK не равен двум другим крайним треугольникам, поскольку у них есть катет, равный стороне квадрата, а у MCK оба катета меньше стороны квадрата.



3. 24 точки на окружности занумерованы (возможно, в беспорядке) нечетными числами 3, 5, 7, ..., 49. Если один номер делится на другой, точки соединяются хордой. Докажите, что найдутся хорды, пересекающиеся внутри круга.

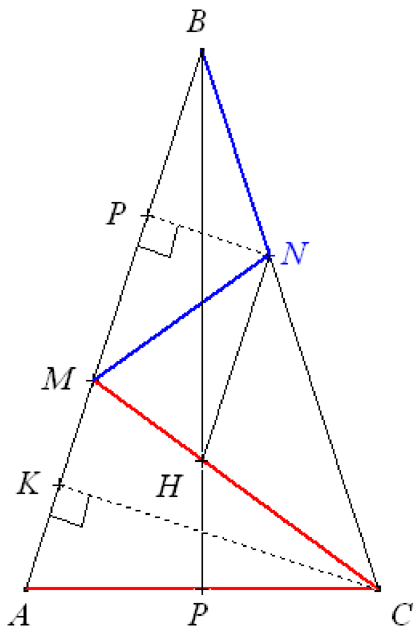
Решение: Вершины цикла 3-21-7-35-5-15-3 обязаны лежать на окружности именно в этом порядке. На какую бы из 6 дуг мы не поместили число 45, то или хорда 3-45, или хорда 5-45 пересечёт сторону цикла.

4. На равных сторонах *AB* и *BC* треугольника *ABC* взяли соответственно точки *M* и *N* такие, что *AC* = *CM* и *MN* = *NB*. Высота треугольника, проведенная из вершины *B*, пересекает отрезок *CM* в точке *H*. Докажите, что *NH* – биссектриса угла *MNC*.



***Решение* 1:** Счёт углов даёт равенство $\angle CMN=\angle CMA$. Поэтому *MC* – биссектриса внешнего угла треугольника *BMN*. А *BH* – биссектриса внутреннего угла треугольника *BMN*. Но эти две биссектрисы пересекаются в центре вневписанной окружности треугольника *BMN*, то есть точка *H* и есть этот центр. Но тогда *NH* – биссектриса угла *MNC*.

***Решение* 2:** Отметим точки *P* и *K* – середины отрезков *BM* и *MA*, тогда в силу равнобедренности треугольников *BNM* и *MCA* отрезки *PN* и *CK* будут перпендикулярны *AB*, значит, будут параллельны между собой, следовательно, будут равны соотношения в силу пропорциональности отрезков, которые с учётом условий задачи дадут следующую цепочку равенств: $\frac{BN}{NC}=\frac{BP}{PK}=\frac{BM/2}{BA/2}=\frac{BM}{BA}=\frac{BM}{BC}=\frac{MH}{HC}$, где последнее равенство выполняется в треугольнике *BMC* в силу свойства биссектрисы для *BH* – биссектрисы-высоты-медианы равнобедренного треугольника *ABC*. Тогда $\frac{MN}{NC}=\frac{BN}{NC}=\frac{MH}{HC}$, значит, по свойству биссектрисы отрезок *NH* в треугольнике *MNC* окажется, биссектрисой.



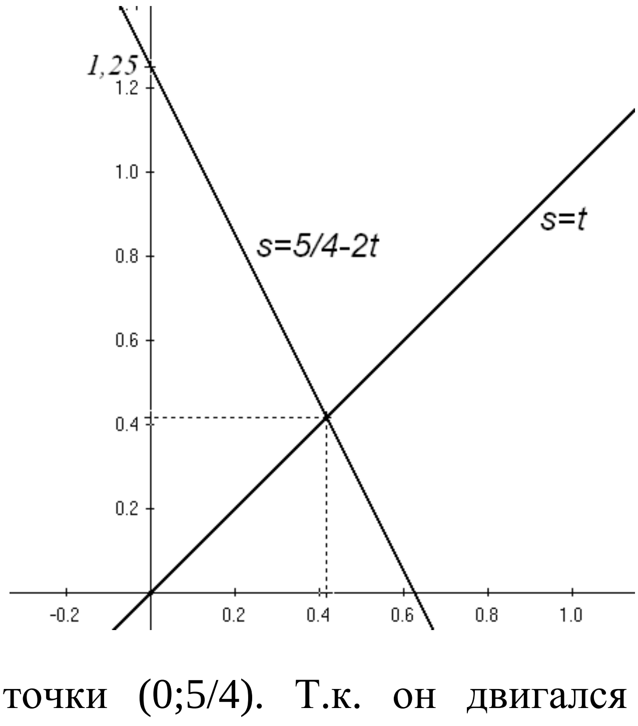
5. «В этой фразе доля цифр *X* составляет …/…, доля цифр *Y* – …/…, доля цифр *Z* – …/…, а на долю остальных использованных цифр остается …/… .». Можно ли вставить разные цифры вместо *X*, *Y* и *Z* и числа (не обязательно разные) вместо многоточий так, чтобы утверждение было верным?

Ответ: Можно. ***Решение:*** Например, «В этой фразе доля цифр 1 составляет 5/15, доля цифр 6 – 2/15, доля цифр 5 – 6/15, а на долю остальных использованных цифр остаётся 2/15.»

6. На прямую между псом в будке и котом положили кило сосисок, и животные одновременно бросились к ним. Кот бегает вдвое быстрее пса, а ест вдвое медленнее. Добежав до сосисок, оба ели без драки, и съели поровну. Известно, что кот мог бы за одно и то же время съесть все сосиски или добежать от места старта до будки пса. К кому ближе положили сосиски, и во сколько раз?

Ответ: Псу до сосисок ближе в 7/5 раза. ***Решение* 1:** Из той части сосисок, которые кот и пёс ели одновременно, пёс съел вдвое больше кота. Значит, перед этим кот ел в одиночку. Пёс съел полкило, значит, одновременно с ним кот съел четверть кило, а ещё столько же он съел в одиночку и потратил на это 1/4 своего базового времени на поедание всех сосисок, которое равно времени преодоления всей дистанции от места своего старта до будки пса. Тогда пёс за эту 1/4 базового времени, когда бежал в одиночку, преодолел расстояние, в два раза меньшее, чем преодолел кот за это же время, т.е. пёс преодолел половину от 1/4, т.е. 1/8 всего расстояния. Тогда оставшиеся 7/8 они бежали одновременно и коту достались 2/3 этого расстояния, т.к. он бежит в два раза быстрее пса. Значит, коту достались 2/3·7/8=7/12 всего расстояния, а псу достались оставшиеся 1–7/12=5/12.

***Решение* 2 (графическое):** Рассмотрим систему координат Ots, где время отмеряем по оси абсцисс, а расстояние – по оси ординат, причём псу на преодоление всего расстояния, равного единице, потребуется единица времени, т.е. пёс движется по прямой $s=t$. Рассуждая вначале аналогично первому решению, получим, что за время самостоятельной еды кот пробежал бы 1/4 всего расстояния. Будет считать, что теперь они участвуют только в «гонке» на одновременное появление у сосисок. Значит, получается, что к точке встречи кот стартовал заранее из точки (0;5/4). Т.к. он двигался с удвоенной скоростью, то уравнение прямой, по которой он движется, будет следующим $s=5/4-2t$. Приравняв данные уравнения $t=5/4-2t$, получим, что момент встречи в такой «гонке» произошёл бы в $t=5/12$ на расстоянии $s=5/12$, т.е. сосиски находились от пса в 5/12 всего расстояния, а от кота – в 7/12, если рассматривать исходную задачу.



7. Перед Аней, Борей и Васей лежит по кучке орехов, всего 101 орех. Сначала Аня положила все свои орехи в кучки остальным, одному вдвое больше, чем другому. Потом Боря сделал то же, положив одному втрое больше, чем другому. Наконец то же сделал Вася, положив одному вчетверо больше, чем другому. В результате у Ани стало столько же орехов, сколько было вначале. Сколько орехов раздал Вася?

Ответ: 85. ***Решение:*** Вася раздал $5x$, где x – натуральное число. В это время у Бори орехов не было, значит, у Ани было $101 - 5x$, а стало $101 - x$ или $101 - 4x$, и это кратно 3, т.к. это её количество орехов в самом начале, когда она смогла его поделить на три части. Поэтому x при делении на 3 должен давать остаток 2, т.е. $x=3k+2$, где k – целое неотрицательное число. Значит, до этого Анино число не делилось на 3, то есть Боря отдал ей не три части, а одну, то есть Боря раздал $4(101-5x)$. Из неравенства $4(101-5(3k+2))\le 101$ получим $k\ge 5$. Но $101-5(3k+2)>0$, откуда $k\le 6$. Если $k=6$, то Боря раздал 4. Тогда Вася раздал 100, и у Ани стало минимум 21. Но если она вначале раздала минимум 21, то у Бори было минимум 7 – противоречие. Значит, $k=5$, $x=17$, Вася раздал 85. Такое возможно. Например, у Ани, Бори, Васи вначале было 33, 53, 15, Боря получил 11, Вася 22, Боря отдал Ане 16, Васе – 48, Вася отдал Ане 17, и у неё снова стало 33.

8. На некоторых клетках шахматной доски лежат бобы, не более двух на клетке, причём на каждой горизонтали и на каждой вертикали число бобов одно и то же (больше одного). Гордей и Вера ходят по очереди, начинает Вера. За ход можно снять с доски один боб. Если образуется пустая вертикаль, выигрывает Вера, если горизонталь – Гордей, а если горизонталь и вертикаль одновременно, то – тот, кто сделал последний ход. Докажите, что Гордей всегда может выиграть.

Решение: Можно считать, что первый боб Вера взяла из клетки К на горизонтали Г, которую теперь назовём *зелёной*. Покажем, что Гордей выигрывает такой стратегией: он всё время берёт бобы с зелёной горизонтали, при этом каждым ходом (кроме, быть может, последнего выигрывающего) оставляя на Г меньше бобов, чем на любой вертикали. Ясно, что если изначально на каждом ряду было по 2 боба, то ответным ходом Гордей выигрывает. Если же изначально в каждом ряду было более двух бобов, то первым ходом Гордей возьмёт не из клетки К, и оставит на Г меньше бобов, чем на любой вертикали. Будем в процессе игры называть *красными* те вертикали, в которых на 1 боб больше, чем в зелёной горизонтали, и при этом в каждой красно-зелёной клетке (на пересечении красной вертикали и зелёной горизонтали) будет находиться не более 1 боба; остальные вертикали, в которых бобов хотя бы на 2 больше, чем в зелёной горизонтали, будем называть *белыми*. После произведённой первой пары ходов у нас есть две красные вертикали, остальные – белые. Если далее в процессе игры Вера берёт боб из белой вертикали, то Гордей в первую очередь берёт боб из зелёной клетки этой вертикали, если там есть 2 боба, иначе из любой другой зелёной клетки. Если Вера берёт из красной вертикали, то Гордей берёт из любой своей зелёной клетки, не входящей в эту красную вертикаль. Тогда после каждой такой пары ходов будет максимум 2 красных вертикали, остальные вертикали будут белыми. В некоторый момент в силу постепенного уменьшения количества бобов в зелёной горизонтали либо Гордей первым обнулит свою зелёную горизонталь, либо первым обнулит сразу «крест» из вертикали-горизонтали, если после хода Веры останется ровно 1 боб в красной вертикали и при этом он будет находиться в красно-зелёной клетке этой вертикали.