Многогранные применения многогранников

В.А. Кириченко*

*Факультет математики и Лаборатория алгебраической геометрии и её приложений,
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики
и
Институт проблем передачи информации им. Харкевича РАН

13 мая 2013 г.

0. Многоугольники (многогранники в размерности 2)

Треугольник, квадрат, пятиугольник,. . . , 17-угольник,. . .

1. Размерность 3: архитектура и кристаллография

Платоновы тела: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр

2. Размерность ≥ 4: научная фантастика и математика

Что такое 4-ое измерение и 4-хмерный гиперкуб?

3. Задачи оптимизации: линейное программирование

Как составить оптимальный рацион из данных продуктов, и при чём здесь многогранники?

4. Алгебраическая геометрия

Многогранники Ньютона многочленов и решения уравнений

Многогранники в природе, науке и искусстве

0. Многоугольники (многогранники в размерности 2)

Треугольник, квадрат, пятиугольник,. . . , 17-угольник,. . .

1. Размерность 3: архитектура и кристаллография

Платоновы тела: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр

2. Размерность ≥ 4: научная фантастика и математика

Что такое 4-ое измерение и 4-хмерный гиперкуб?

3. Задачи оптимизации: линейное программирование

Как составить оптимальный рацион из данных продуктов, и при чём здесь многогранники?

4. Алгебраическая геометрия

Многогранники Ньютона многочленов и решения уравнений

Многогранники в природе, науке и искусстве

0. Многоугольники (многогранники в размерности 2)

Треугольник, квадрат, пятиугольник,. . . , 17-угольник,. . .

1. Размерность 3: архитектура и кристаллография

Платоновы тела: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр

2. Размерность ≥ 4: научная фантастика и математика

Что такое 4-ое измерение и 4-хмерный гиперкуб?

3. Задачи оптимизации: линейное программирование

Как составить оптимальный рацион из данных продуктов, и при чём здесь многогранники?

4. Алгебраическая геометрия

Многогранники Ньютона многочленов и решения уравнений

Многогранники в природе, науке и искусстве

0. Многоугольники (многогранники в размерности 2)

Треугольник, квадрат, пятиугольник,. . . , 17-угольник,. . .

1. Размерность 3: архитектура и кристаллография

Платоновы тела: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр

2. Размерность ≥ 4: научная фантастика и математика

Что такое 4-ое измерение и 4-хмерный гиперкуб?

3. Задачи оптимизации: линейное программирование

Как составить оптимальный рацион из данных продуктов, и при чём здесь многогранники?

4. Алгебраическая геометрия

Многогранники Ньютона многочленов и решения уравнений

Многогранники в природе, науке и искусстве

0. Многоугольники (многогранники в размерности 2)

Треугольник, квадрат, пятиугольник,. . . , 17-угольник,. . .

1. Размерность 3: архитектура и кристаллография

Платоновы тела: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр

2. Размерность ≥ 4: научная фантастика и математика

Что такое 4-ое измерение и 4-хмерный гиперкуб?

3. Задачи оптимизации: линейное программирование

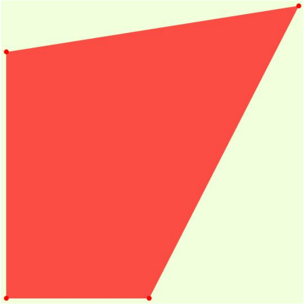
Как составить оптимальный рацион из данных продуктов, и при чём здесь многогранники?

4. Алгебраическая геометрия

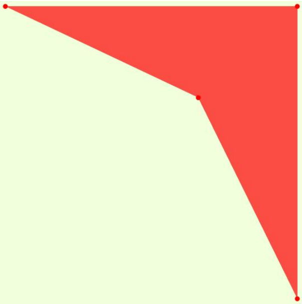
Многогранники Ньютона многочленов и решения уравнений

Многоугольники

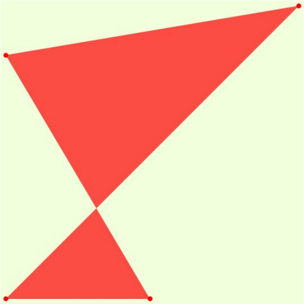
Возьмём несколько точек на плоскости. Соединим отрезком первую точку со второй, вторую с третьей, ..., последнюю с первой. Получим замкнутую ломаную, ограничивающую *многоугольник* с *вершинами* в исходных точках.



Многоугольники

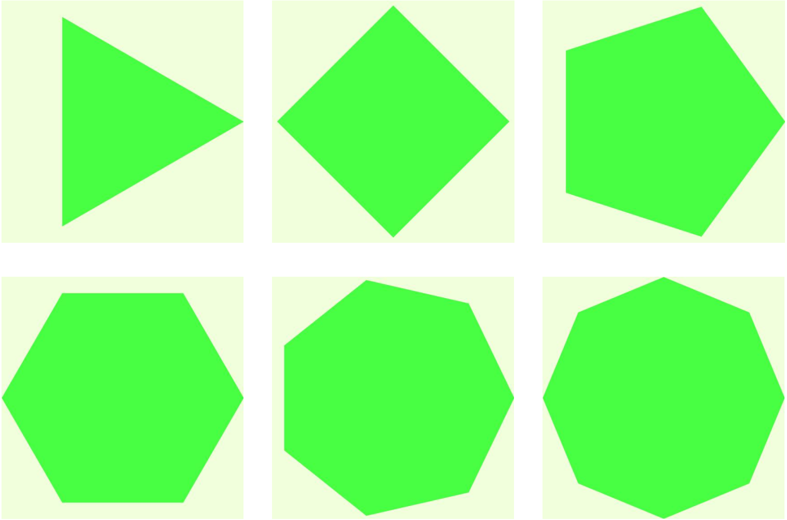


Невыпуклый четырёхугольник



Самопересекающийся четырёхугольник

Правильные многоугольники



Правильные многоугольники

Канадский доллар “loonie”, правильный 11-угольник

Правильные многоугольники

Здание Министерства обороны США,
правильный пятиугольник

Правильные многоугольники

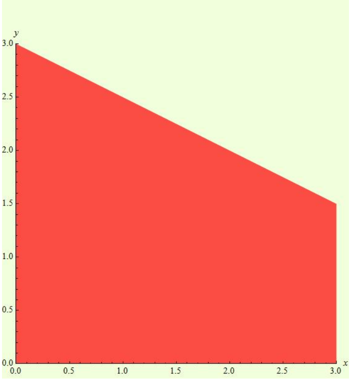
Пчелиные соты,
правильные шестиугольники

Многоугольники

Многоугольники можно задавать и с помощью линейных неравенств. Например, четыре неравенства

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x \leq 3, \quad x + 2y \leq 6$$

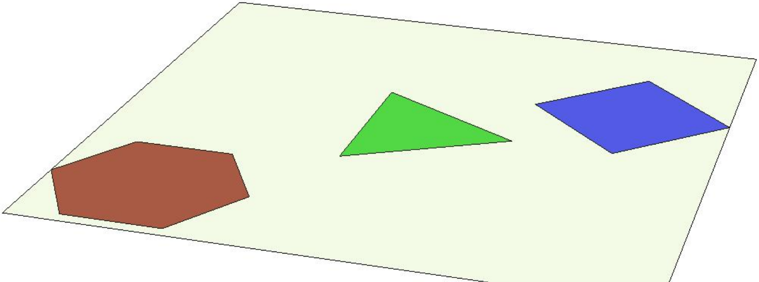
задают четырёхугольник



Научно-фантастические романы о многоугольниках

- Флатландия, Эдвин.Э.Эбботт, 1884
- Сферландия, Дионис Бюргер, 1957
- перевод на русский: издательство “Мир”, Москва, 1976

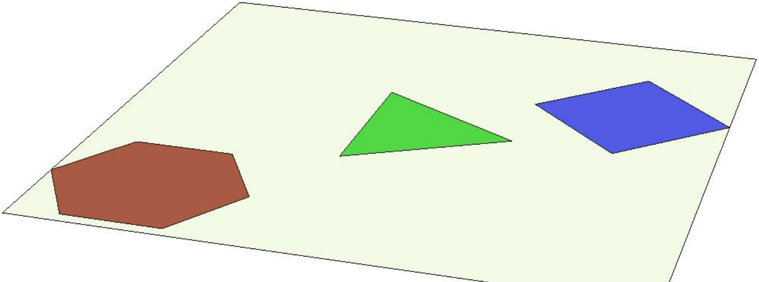
Флатландия — страна в виде огромной плоскости, населённая многоугольниками. Жители считают, что есть только два измерения — длина и ширина. Третье измерение — высоту — они не чувствуют.



Научно-фантастические романы о многоугольниках

- Флатландия, Эдвин.Э.Эбботт, 1884
- Сферландия, Дионис Бюргер, 1957
- перевод на русский: издательство “Мир”, Москва, 1976

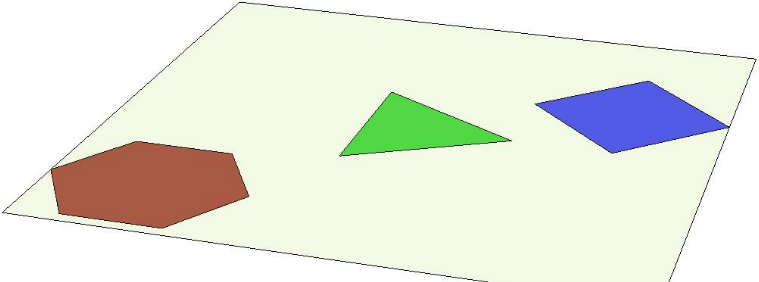
Флатландия — страна в виде огромной плоскости, населённая многоугольниками. Жители считают, что есть только два измерения — длина и ширина. Третье измерение — высоту — они не чувствуют.



Научно-фантастические романы о многоугольниках

- Флатландия, Эдвин.Э.Эбботт, 1884
- Сферландия, Дионис Бюргер, 1957
- перевод на русский: издательство “Мир”, Москва, 1976

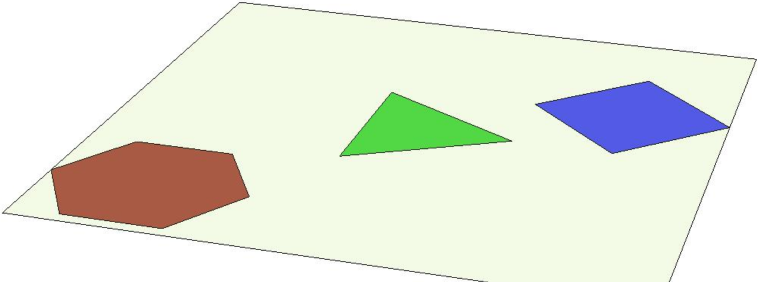
Флатландия — страна в виде огромной плоскости, населённая многоугольниками. Жители считают, что есть только два измерения — длина и ширина. Третье измерение — высоту — они не чувствуют.



Научно-фантастические романы о многоугольниках

- Флатландия, Эдвин.Э.Эбботт, 1884
- Сферландия, Дионис Бюргер, 1957
- перевод на русский: издательство “Мир”, Москва, 1976

Флатландия — страна в виде огромной плоскости, населённая многоугольниками. Жители считают, что есть только два измерения — длина и ширина. Третье измерение — высоту — они не чувствуют.



Как построить многоугольник циркулем и линейкой?

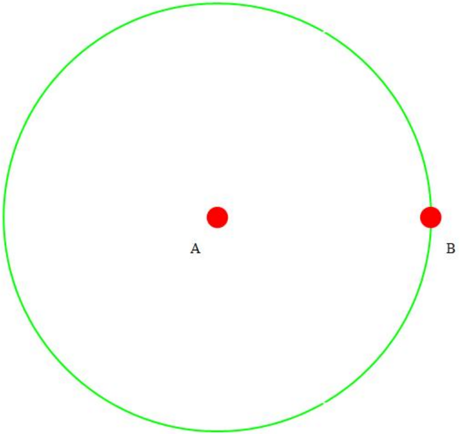
Задача

Построить циркулем и линейкой равносторонний треугольник с основанием AB (то есть, построить третью вершину).

Как построить многоугольник циркулем и линейкой?

Шаг 1

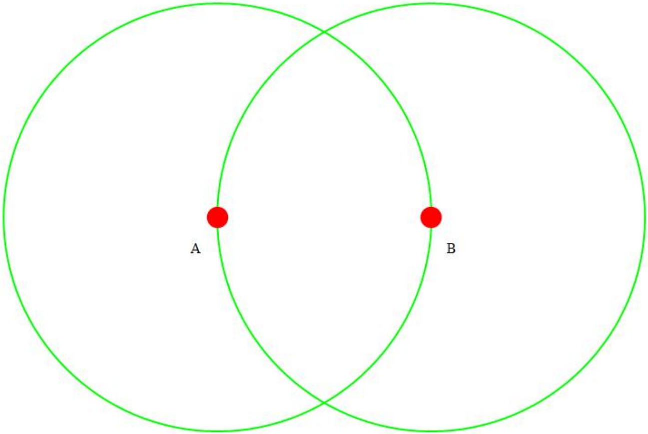
Построим окружность с центром в точке A, проходящую через точку B.



Как построить многоугольник циркулем и линейкой?

Шаг 2

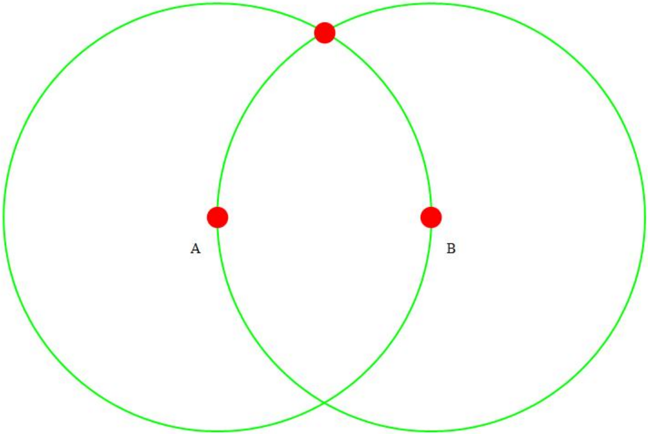
Построим окружность с центром в точке B, проходящую через точку A.



Как построить многоугольник циркулем и линейкой?

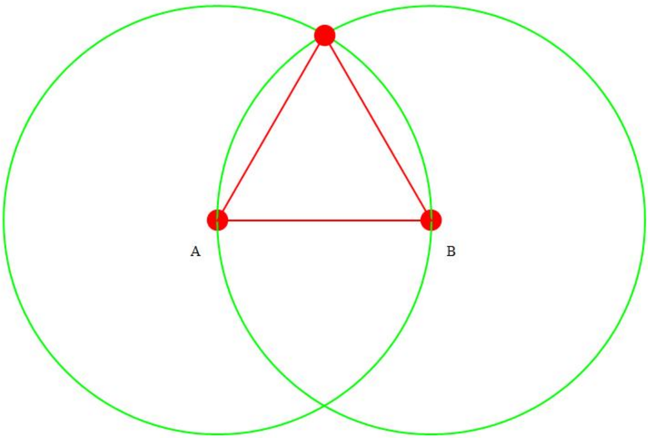
Шаг 3

Точка пересечения построенных окружностей — третья вершина равностороннего треугольника.



Как построить многоугольник циркулем и линейкой?

Решение



Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

МОЖНО

- треугольник
- квадрат
- пятиугольник
- шестиугольник, восьмиугольник, 10-угольник, 12-угольник, 15-угольник и 16-угольник (более общо, 2^k-, $3 \cdot 2^k$-, $5 \cdot 2^k$- и $3 \cdot 5 \cdot 2^k$-угольник для любого натурального числа k)

НЕЛЬЗЯ

- семиугольник
- девятиугольник
- 11-угольник
- 13-угольник
- 14-угольник

Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

МОЖНО

- треугольник
- квадрат
- пятиугольник
- шестиугольник, восьмиугольник, 10-угольник, 12-угольник, 15-угольник и 16-угольник (более общо, 2^k-, $3 \cdot 2^k$-, $5 \cdot 2^k$- и $3 \cdot 5 \cdot 2^k$-угольник для любого натурального числа k)

НЕЛЬЗЯ

- семиугольник
- девятиугольник
- 11-угольник
- 13-угольник
- 14-угольник

Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

МОЖНО

- треугольник
- квадрат
- пятиугольник
- шестиугольник, восьмиугольник, 10-угольник, 12-угольник, 15-угольник и 16-угольник (более общо, 2^k-, $3 \cdot 2^k$-, $5 \cdot 2^k$- и $3 \cdot 5 \cdot 2^k$-угольник для любого натурального числа k)

НЕЛЬЗЯ

- семиугольник
- девятиугольник
- 11-угольник
- 13-угольник
- 14-угольник

Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

МОЖНО

- треугольник
- квадрат
- пятиугольник
- шестиугольник, восьмиугольник, 10-угольник, 12-угольник, 15-угольник и 16-угольник (более общо, 2^k-, $3 \cdot 2^k$-, $5 \cdot 2^k$- и $3 \cdot 5 \cdot 2^k$-угольник для любого натурального числа k)

НЕЛЬЗЯ

- семиугольник
- девятиугольник
- 11-угольник
- 13-угольник
- 14-угольник

Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

МОЖНО

- треугольник
- квадрат
- пятиугольник
- шестиугольник, восьмиугольник, 10-угольник, 12-угольник, 15-угольник и 16-угольник (более общо, 2^k-, $3 \cdot 2^k$-, $5 \cdot 2^k$- и $3 \cdot 5 \cdot 2^k$-угольник для любого натурального числа k)

НЕЛЬЗЯ

- семиугольник
- девятиугольник
- 11-угольник
- 13-угольник
- 14-угольник

Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

МОЖНО

- треугольник
- квадрат
- пятиугольник
- шестиугольник, восьмиугольник, 10-угольник, 12-угольник, 15-угольник и 16-угольник (более общо, 2^k-, $3 \cdot 2^k$-, $5 \cdot 2^k$- и $3 \cdot 5 \cdot 2^k$-угольник для любого натурального числа k)

НЕЛЬЗЯ

- семиугольник
- девятиугольник
- 11-угольник
- 13-угольник
- 14-угольник

Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

МОЖНО

- треугольник
- квадрат
- пятиугольник
- шестиугольник, восьмиугольник, 10-угольник, 12-угольник, 15-угольник и 16-угольник (более общо, 2^k-, $3 \cdot 2^k$-, $5 \cdot 2^k$- и $3 \cdot 5 \cdot 2^k$-угольник для любого натурального числа k)

НЕЛЬЗЯ

- семиугольник
- девятиугольник
- 11-угольник
- 13-угольник
- 14-угольник

Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

МОЖНО

- треугольник
- квадрат
- пятиугольник
- шестиугольник, восьмиугольник, 10-угольник, 12-угольник, 15-угольник и 16-угольник (более общо, 2^k-, $3 \cdot 2^k$-, $5 \cdot 2^k$- и $3 \cdot 5 \cdot 2^k$-угольник для любого натурального числа k)

НЕЛЬЗЯ

- семиугольник
- девятиугольник
- 11-угольник
- 13-угольник
- 14-угольник

Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

МОЖНО

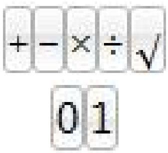
- треугольник
- квадрат
- пятиугольник
- шестиугольник, восьмиугольник, 10-угольник, 12-угольник, 15-угольник и 16-угольник (более общо, 2^k-, $3 \cdot 2^k$-, $5 \cdot 2^k$- и $3 \cdot 5 \cdot 2^k$-угольник для любого натурального числа k)

НЕЛЬЗЯ

- семиугольник
- девятиугольник
- 11-угольник
- 13-угольник
- 14-угольник

Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

Оказывается, используя только две точки $(0,0)$ и $(0,1)$, можно построить в точности все такие точки (x,y), что x и y получаются из 0 и 1 с помощью четырёх арифметических операций и операции извлечения квадратного корня.

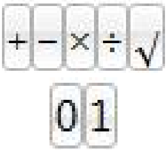


Например, можно построить

$$\sqrt{2+\sqrt{5}} = \sqrt{1+1+\sqrt{1+1+1+1+1}}.$$

Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

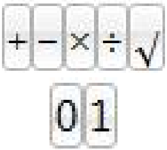
Оказывается, используя только две точки $(0,0)$ и $(0,1)$, можно построить в точности все такие точки (x,y), что x и y получаются из 0 и 1 с помощью четырёх арифметических операций и операции извлечения квадратного корня.



Например, можно построить $\sqrt{2+\sqrt{5}} = \sqrt{1+1+\sqrt{1+1+1+1+1}}$.

Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

Оказывается, используя только две точки $(0,0)$ и $(0,1)$, можно построить в точности все такие точки (x,y), что x и y получаются из 0 и 1 с помощью четырёх арифметических операций и операции извлечения квадратного корня.

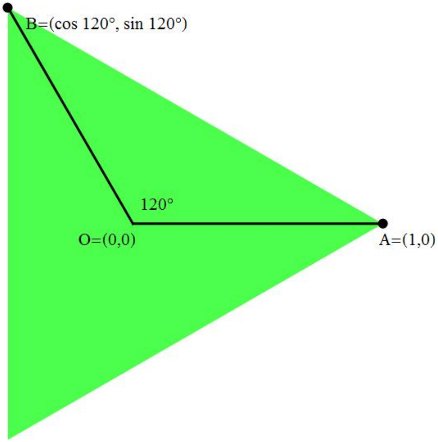


Например, можно построить
$$\sqrt{2+\sqrt{5}} = \sqrt{1+1+\sqrt{1+1+1+1+1}}.$$

Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

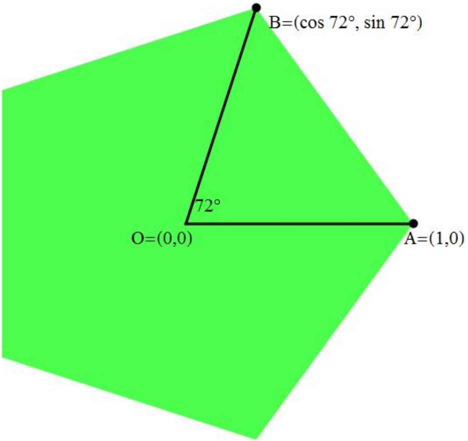
$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

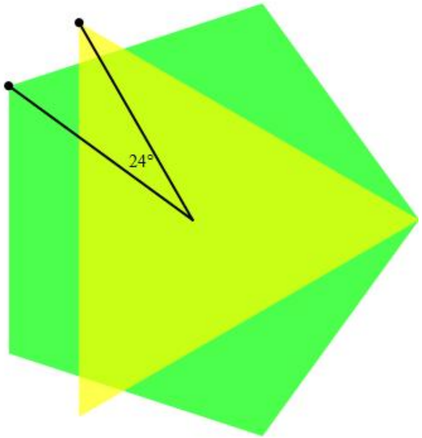
$$\cos 72^\circ = \frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5}\right)$$

$$\sin 72^\circ = \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}$$



Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

Чтобы построить правильный 15-угольник, достаточно построить правильные треугольник и пятиугольник.



Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

Карл Фридрих Гаусс
(1777–1855),
великий немецкий математик,
физик и астроном

Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

Построение 17-угольника

$$\cos\frac{360^\circ}{17} =$$

$$\frac{\sqrt{15+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{2\left(34+6\sqrt{17}-\sqrt{578-34\sqrt{17}}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+8\sqrt{2\left(17+\sqrt{17}\right)}\right)}}}{4\sqrt{2}}$$

$$\sin\frac{360^\circ}{17} =$$

$$\frac{\sqrt{8-\sqrt{2\left(15+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}-\sqrt{2\left(34+6\sqrt{17}+\sqrt{578-34\sqrt{17}}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-8\sqrt{2\left(17+\sqrt{17}\right)}\right)}\right)}}}{4}$$

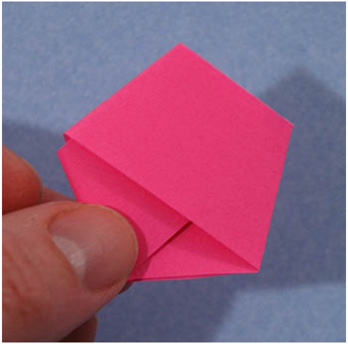
Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

памятник Гауссу в его родном городе (Брауншвейг, Германия)

17-конечная звезда (такая же изображена на постаменте памятника)

Многоугольники

Как сделать правильный пятиугольник из полоски бумаги:



Третье измерение

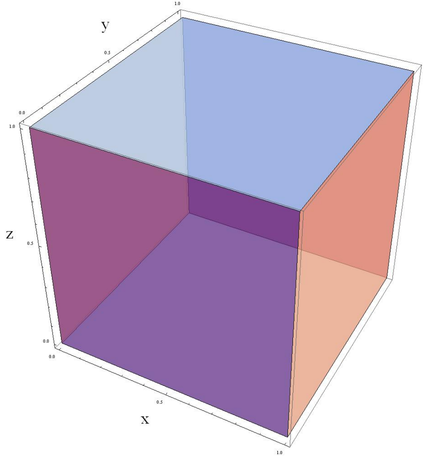
Рисунок М.К.Эшера

Многогранники

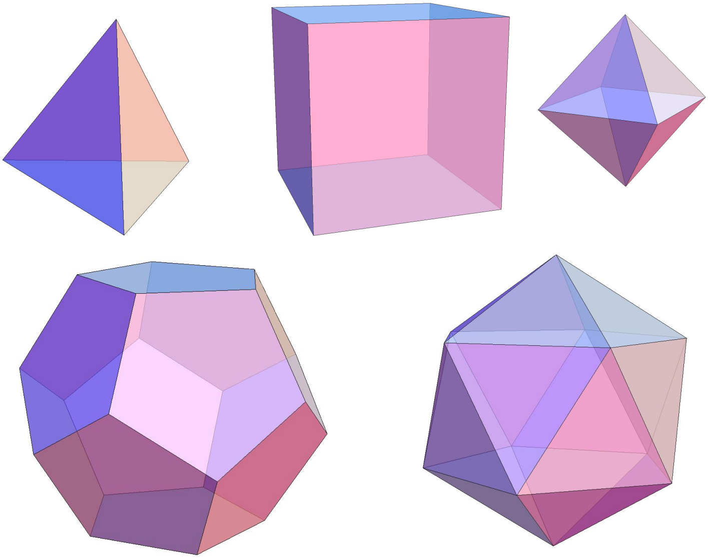
Многогранники, как и многоугольники, можно задавать и с помощью линейных неравенств. Например, шесть неравенств

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1$$

задают трёхмерный куб.



Правильные многогранники



Правильные многогранники

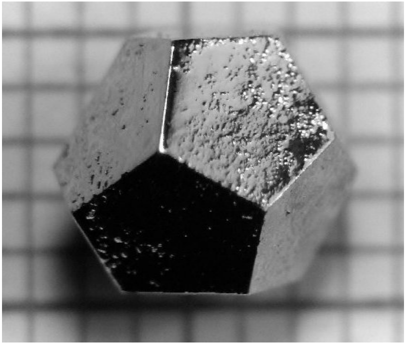
Кристалл двойной соли хрома и калия $KCr(SO_4)_2$, правильный октаэдр

Многогранники

Египетская пирамида, половина правильного октаэдра

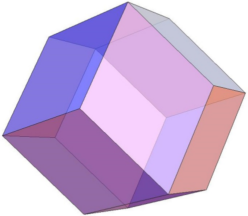
Правильные многогранники

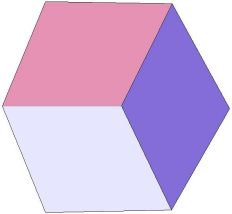
Квазикристалл гольмий–магний–цинк, правильный додекаэдр



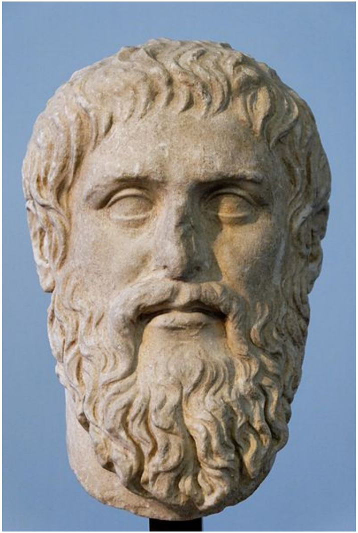
Многогранники

Снова пчелиные соты:
основание соты — три грани
ромбододекаэдра





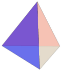
Правильные многогранники



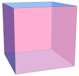
Платон (428–348 до н.э.)
великий древнегреческий философ

Правильные многогранники

Четыре элемента



1. огонь — тетраэдр



2. земля — куб

3. вода — икосаэдр

4. воздух — октаэдр

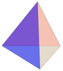
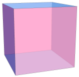
Пятый элемент

5. эфир — додекаэдр

Правильные многогранники

Четыре элемента

1. огонь — тетраэдр
2. земля — куб
3. вода — икосаэдр
4. воздух — октаэдр

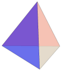



Пятый элемент

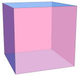
5. эфир — додекаэдр

Правильные многогранники

Четыре элемента



1. огонь — тетраэдр



2. земля — куб

3. вода — икосаэдр

4. воздух — октаэдр

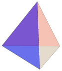
Пятый элемент

5. эфир — додекаэдр

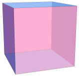
Правильные многогранники

Четыре элемента

1. огонь — тетраэдр



2. земля — куб



3. вода — икосаэдр

4. воздух — октаэдр

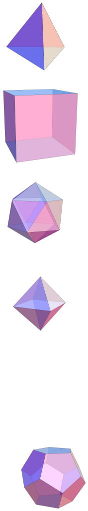
Пятый элемент

5. эфир — додекаэдр

Правильные многогранники

Четыре элемента

1. огонь — тетраэдр
2. земля — куб
3. вода — икосаэдр
4. воздух — октаэдр

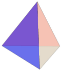


Пятый элемент

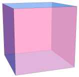
5. эфир — додекаэдр

Правильные многогранники

Четыре элемента



1. огонь — тетраэдр



2. земля — куб

3. вода — икосаэдр

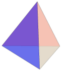
4. воздух — октаэдр

Пятый элемент

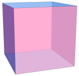
5. эфир — додекаэдр

Правильные многогранники

Четыре элемента



1. огонь — тетраэдр



2. земля — куб

3. вода — икосаэдр

4. воздух — октаэдр

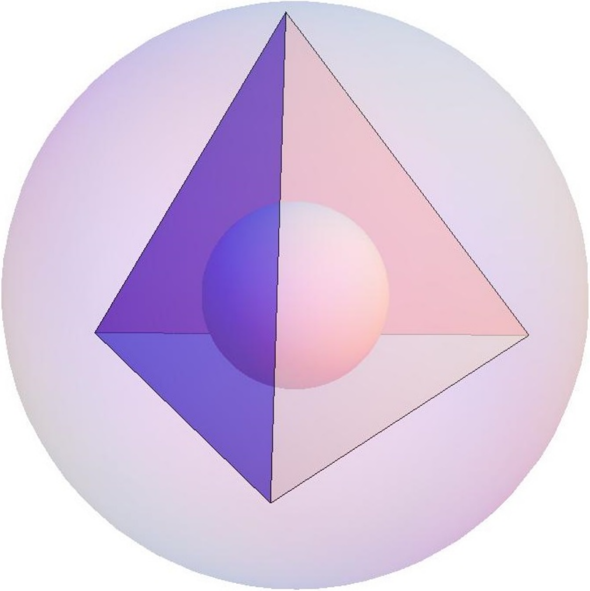
Пятый элемент

5. эфир — додекаэдр

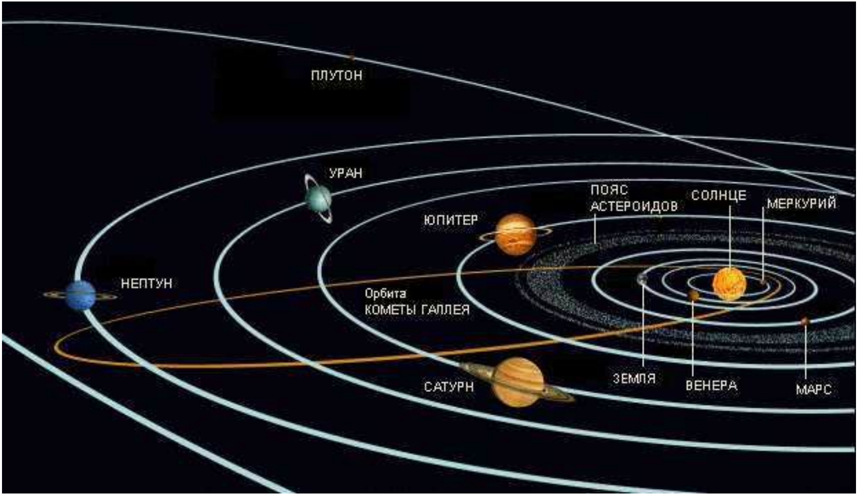
Правильные многогранники

Кеплер (1571–1630)
выдающийся немецкий
математик и астроном

Тетраэдр и его вписанная и описанная сферы

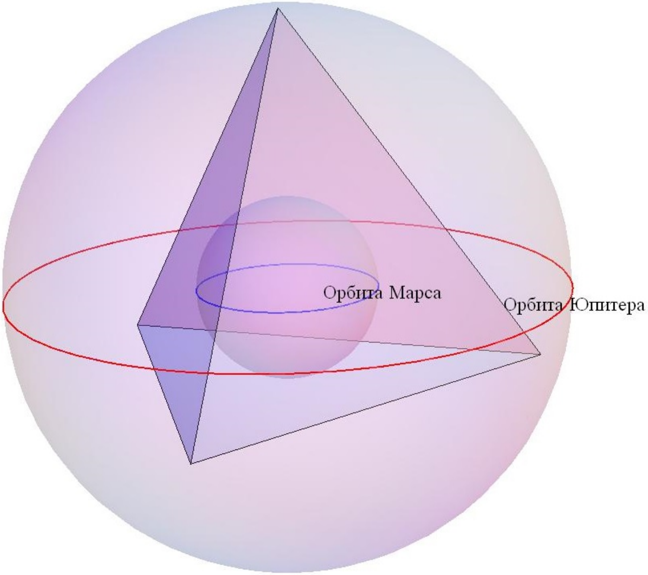


Правильные многогранники



Солнечная система

Правильные многогранники



Орбиты Марса и Юпитера согласно Кеплеру

Правильные многогранники

Наименьший радиус орбиты Юпитера:

$$740,57 \text{ млн км}$$

Наибольший радиус орбиты Марса:

$$249,2 \text{ млн км}$$

Отношение радиусов орбит:

$$2.97$$

Отношение радиуса описанной сферы тетраэдра к радиусу вписанной:

$$3$$

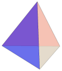
Правильные многогранники

Шесть планет

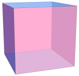
1. между Меркурием и Венерой — октаэдр

2. между Венерой и Землёй — икосаэдр

3. между Землёй и Марсом — додекаэдр



4. между Марсом и Юпитером — тетраэдр



5. между Юпитером и Сатурном — куб

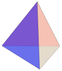
Правильные многогранники

Шесть планет

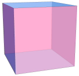
1. между Меркурием и Венерой — октаэдр

2. между Венерой и Землёй — икосаэдр

3. между Землёй и Марсом — додекаэдр



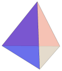
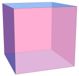
4. между Марсом и Юпитером — тетраэдр



5. между Юпитером и Сатурном — куб

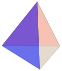
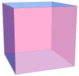
Правильные многогранники

Шесть планет

1. между Меркурием и Венерой — октаэдр 
2. между Венерой и Землёй — икосаэдр 
3. между Землёй и Марсом — додекаэдр 
4. между Марсом и Юпитером — тетраэдр 
5. между Юпитером и Сатурном — куб 

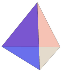
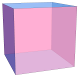
Правильные многогранники

Шесть планет

1. между Меркурием и Венерой — октаэдр 
2. между Венерой и Землёй — икосаэдр 
3. между Землёй и Марсом — додекаэдр 
4. между Марсом и Юпитером — тетраэдр 
5. между Юпитером и Сатурном — куб 

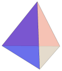
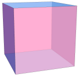
Правильные многогранники

Шесть планет

1. между Меркурием и Венерой — октаэдр 
2. между Венерой и Землёй — икосаэдр 
3. между Землёй и Марсом — додекаэдр 
4. между Марсом и Юпитером — тетраэдр 
5. между Юпитером и Сатурном — куб 

Правильные многогранники

Шесть планет

1. между Меркурием и Венерой — октаэдр 
2. между Венерой и Землёй — икосаэдр 
3. между Землёй и Марсом — додекаэдр 
4. между Марсом и Юпитером — тетраэдр 
5. между Юпитером и Сатурном — куб 

Правильные многогранники

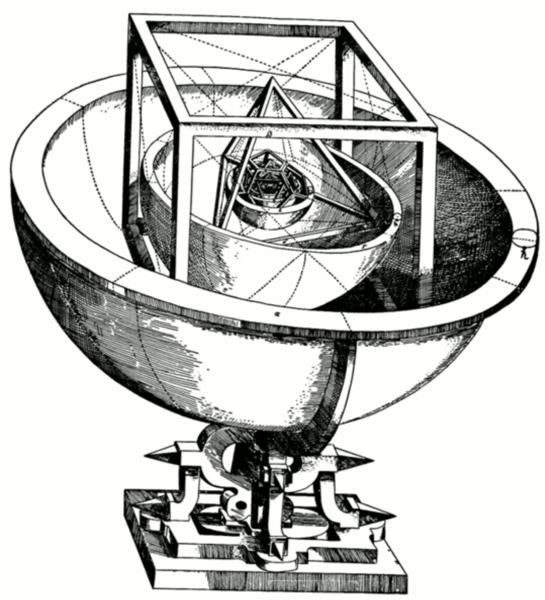


Рисунок из книги Кеплера “Тайна мироздания”, Тюбинген, 1596

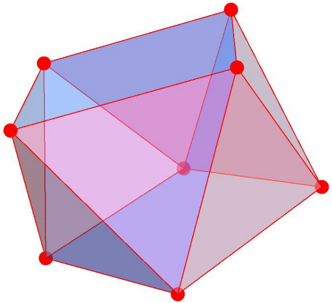
Многогранники

Формула Эйлера

Для любого трёхмерного многогранника справедлива формула

$$\mathrm{B} - \mathrm{P} + \Gamma = 2,$$

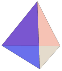
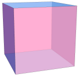
где B — число вершин, P — число рёбер, а Γ — число граней.



Многогранники

Леонард Эйлер (1707–1783),
великий швейцарский математик и физик

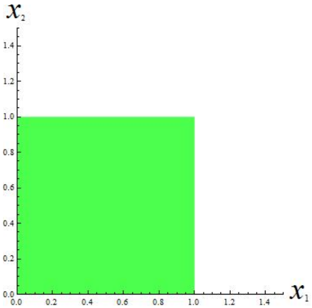
Многогранники

многогранник	В	Р	Г
 тетраэдр	4	6	4
 куб	8	12	6
 октаэдр	6	12	8
 додекаэдр	20	30	12
 икосаэдр	12	30	20

Размерности

прямая (**размерность 1**)
координата x_1
единичный отрезок: $0 \leq x_1 \leq 1$

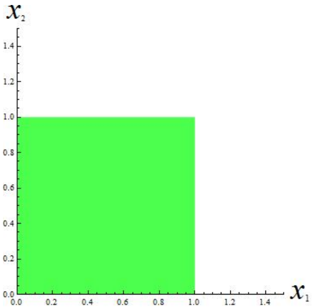
плоскость (**размерность 2**)
координаты x_1, x_2
единичный квадрат: $0 \leq x_1 \leq 1$,
$0 \leq x_2 \leq 1$



Размерности

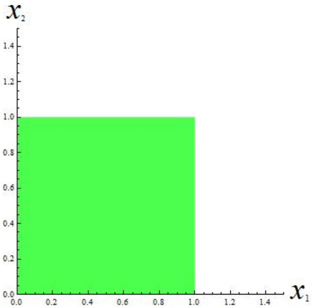
плоскость (**размерность 2**)
координаты x_1, x_2
единичный квадрат: $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$

прямая (**размерность 1**)
координата x_1
единичный отрезок: $0 \leq x_1 \leq 1$



Размерности

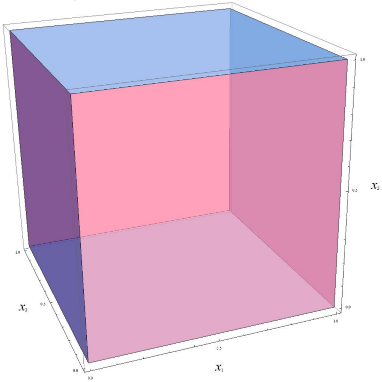
плоскость (**размерность 2**)
координаты x_1, x_2
единичный квадрат: $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$



прямая (**размерность 1**)
координата x_1
единичный отрезок: $0 \leq x_1 \leq 1$

Размерности

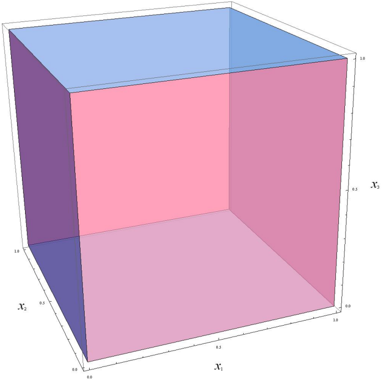
пространство (**размерность 3**)
координаты x_1, x_2, x_3
единичный куб:
$0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$,
$0 \leq x_3 \leq 1$



четырёхмерное пространство
(**размерность 4**)
координаты x_1, x_2, x_3, x_4
единичный четырёхмерный куб
(он же *тессеракт* и *гиперкуб*):
$0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$,
$0 \leq x_3 \leq 1$, $0 \leq x_4 \leq 1$

Размерности

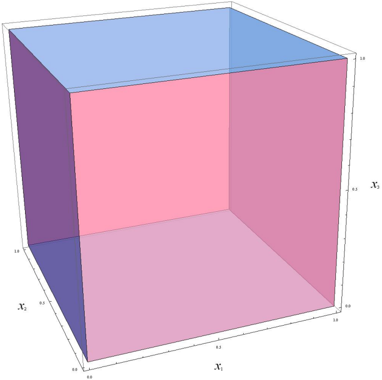
пространство (**размерность 3**)
координаты x_1, x_2, x_3
единичный куб:
$0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$,
$0 \leq x_3 \leq 1$



четырёхмерное пространство (**размерность 4**)
координаты x_1, x_2, x_3, x_4
единичный четырёхмерный куб (он же *тессеракт* и *гиперкуб*):
$0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$,
$0 \leq x_3 \leq 1$, $0 \leq x_4 \leq 1$

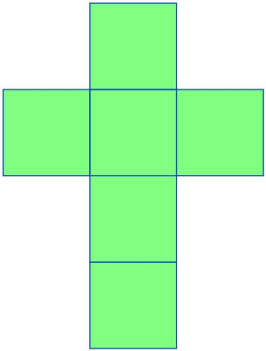
Размерности

пространство (**размерность 3**)
координаты x_1, x_2, x_3
единичный куб:
$0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 1$,
$0 \le x_3 \le 1$

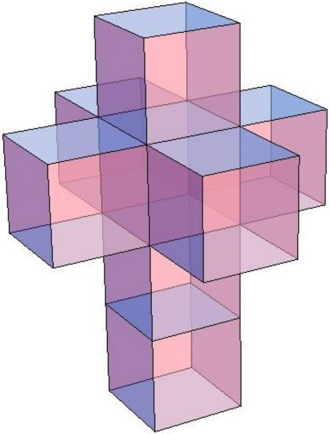


четырёхмерное пространство (**размерность 4**)
координаты x_1, x_2, x_3, x_4
единичный четырёхмерный куб (он же *тессеракт* и *гиперкуб*):
$0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 1$,
$0 \le x_3 \le 1$, $0 \le x_4 \le 1$

Многогранники в размерности 4

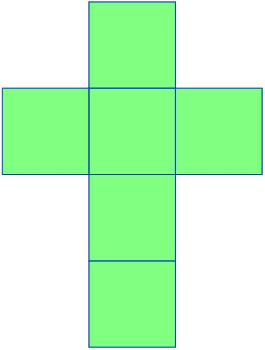


развёртка трёхмерного куба

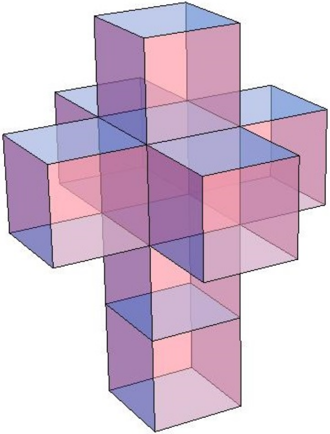


развёртка четырёхмерного куба

Многогранники в размерности 4

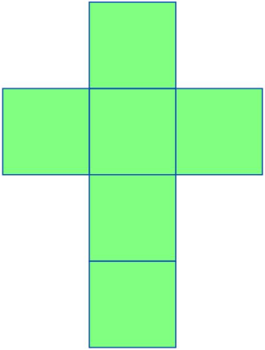


развёртка трёхмерного куба

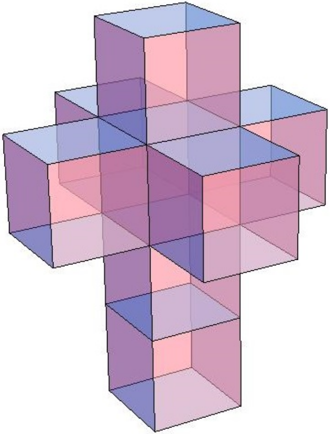


развёртка четырёхмерного куба

Многогранники в размерности 4

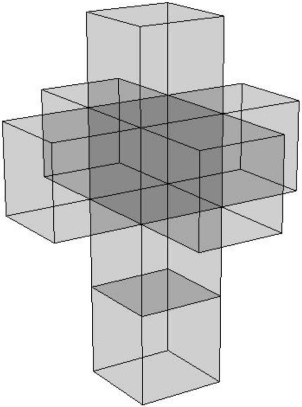


развёртка трёхмерного куба



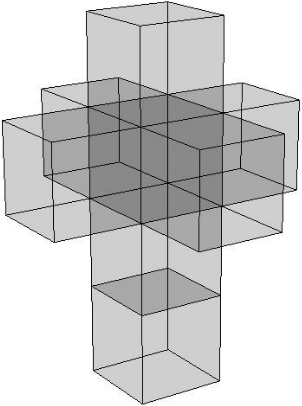
развёртка четырёхмерного куба

Многогранники в размерности 4



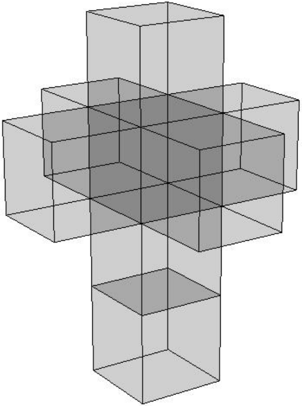
Архитектурный проект из научно-фантастическкго рассказа Роберта Хайнлайна "И построил он дом…" ("—And he built a crooked house…")

Многогранники в размерности 4



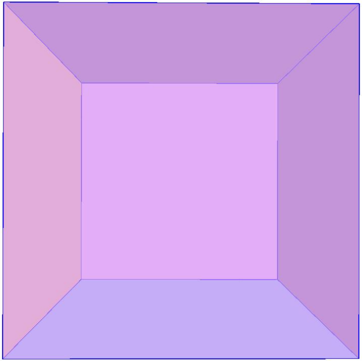
Архитектурный проект из научно-фантастическкго рассказа Роберта Хайнлайна "И построил он дом..." ("—And he built a crooked house...")

Многогранники в размерности 4

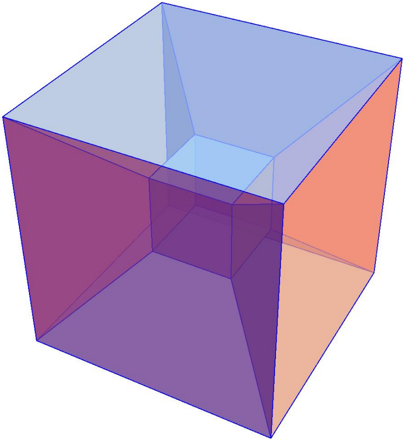


Архитектурный проект из научно-фантастическкго рассказа Роберта Хайнлайна "И построил он дом…" ("—And he built a crooked house…")

Многогранники в размерности 4



двумерная проекция
трёхмерного куба



трёхмерная проекция
четырёхмерного куба

Многогранники в размерности 4

Трёхмерная проекция 120-клетки — правильного четырёхмерного многогранника, Филдсовский институт, (Торонто, Канада)

Многогранники в размерности 4

Трёхмерная проекция 120-клетки — правильного четырёхмерного многогранника, Филдсовский институт, (Торонто, Канада)

Многогранники в размерности 4

Трёхмерная проекция 120-клетки — правильного четырёхмерного многогранника, Филдсовский институт, (Торонто, Канада)

Задача о рационе: простой пример

Таблица показывает содержание белков, жиров и калорий в пальмовом масле, сое и мясе, а также стоимость каждого продукта.

	Масло	Соя	Мясо
Цена (рубли)	10	30	60
Белок (г)	1	7	8
Жир (г)	8	2	3
Калории	50	100	100

Мясной комбинат хочет разработать рецепт колбасы из этих трёх продуктов, так чтобы в одной порции содержалось по крайней мере 8 граммов белка, 4 грамма жира и 70 калорий. Найти самый дешёвый рецепт.

Линейное программирование

Обозначения

x_1 — масса пальмового масла в порции колбасы
x_2 — масса сои
x_3 — масса мяса

Вычисление питательной ценности

$x_1 + 7x_2 + 8x_3$ — содержание белка в порции колбасы
$8x_1 + 2x_2 + 3x_3$ — содержание жира
$50x_1 + 100x_2 + 100x_3$ — количество калорий

Вычисление стоимости

$10x_1 + 30x_2 + 60x_3$ — стоимость одной порции колбасы

Линейное программирование

Обозначения

x_1 — масса пальмового масла в порции колбасы

x_2 — масса сои

x_3 — масса мяса

Вычисление питательной ценности

$x_1 + 7x_2 + 8x_3$ — содержание белка в порции колбасы

$8x_1 + 2x_2 + 3x_3$ — содержание жира

$50x_1 + 100x_2 + 100x_3$ — количество калорий

Вычисление стоимости

$10x_1 + 30x_2 + 60x_3$ — стоимость одной порции колбасы

Линейное программирование

Обозначения

x_1 — масса пальмового масла в порции колбасы

x_2 — масса сои

x_3 — масса мяса

Вычисление питательной ценности

$x_1 + 7x_2 + 8x_3$ — содержание белка в порции колбасы

$8x_1 + 2x_2 + 3x_3$ — содержание жира

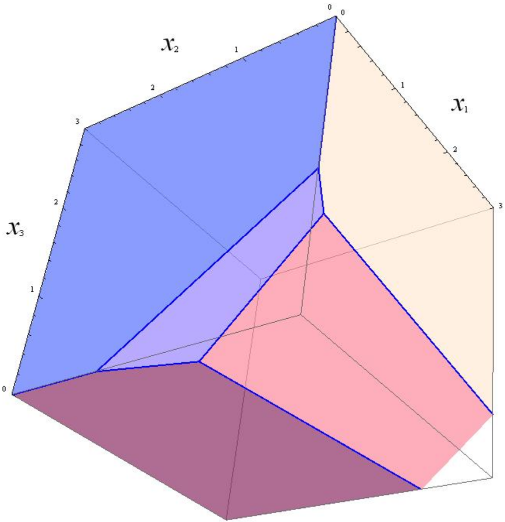
$50x_1 + 100x_2 + 100x_3$ — количество калорий

Вычисление стоимости

$10x_1 + 30x_2 + 60x_3$ — стоимость одной порции колбасы

Линейное программирование

Многогранник



Неравенства

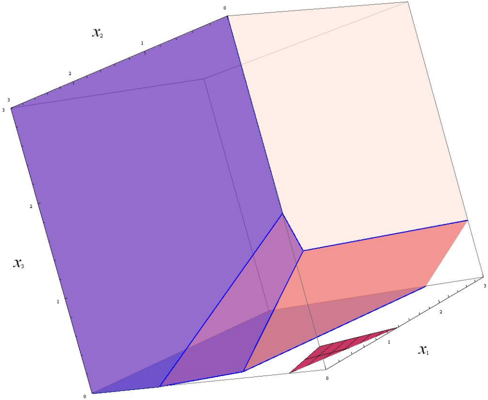
$$x_1 + 7x_2 + 8x_3 \geq 8$$
$$8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 4$$
$$50x_1 + 100x_2 + 100x_3 \geq 70$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$

Многогранник и плоскость

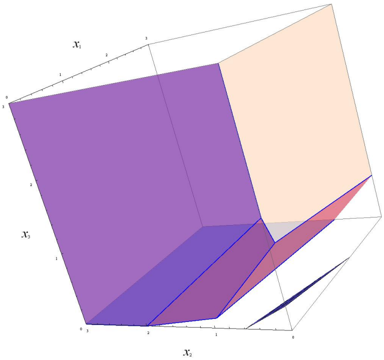
Стоимость

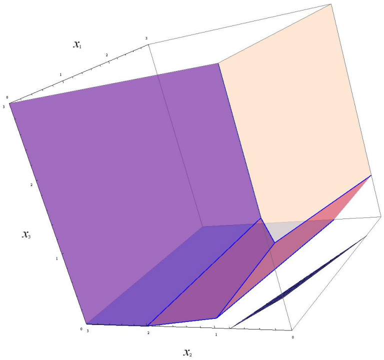
Попробуем уложиться в 12 рублей. Получаем плоскость

$10x_1 + 30x_2 + 60x_3 = 12$



Линейное программирование

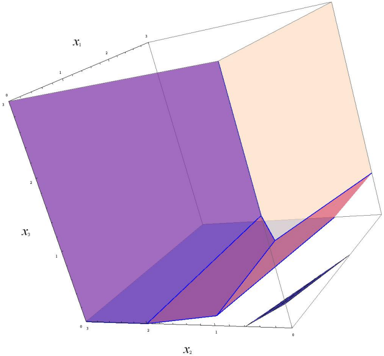




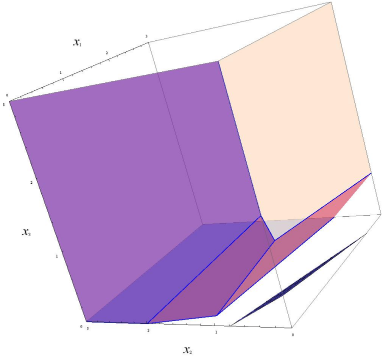
18 рублей

24 рубля

Линейное программирование

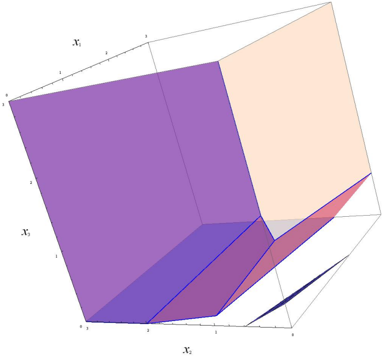


18 рублей

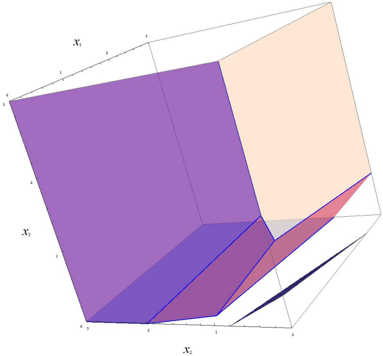


24 рубля

Линейное программирование

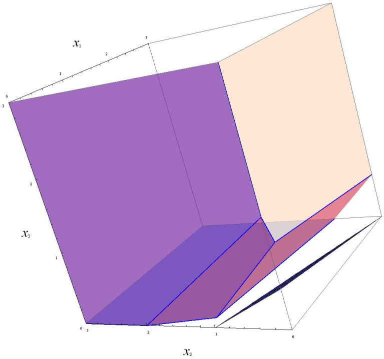


18 рублей

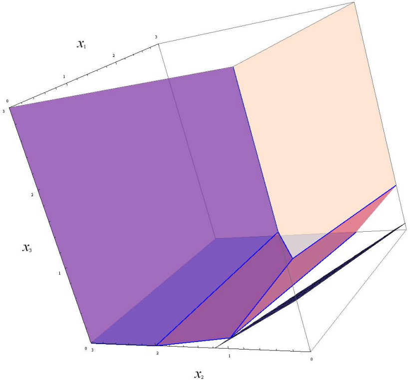


24 рубля

Линейное программирование

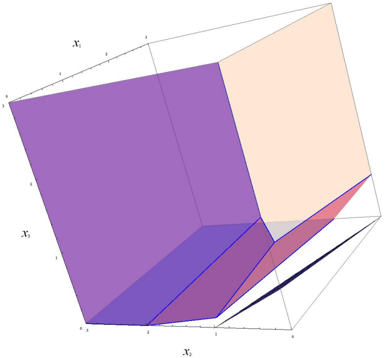


30 рублей

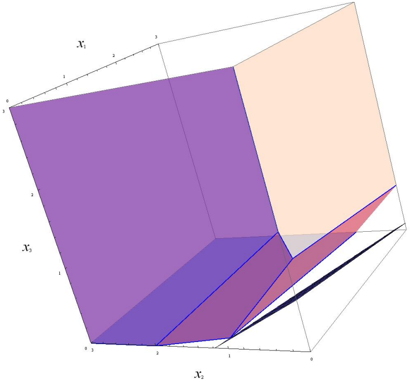


35.5(5) рублей — самый дешёвый рецепт

Линейное программирование

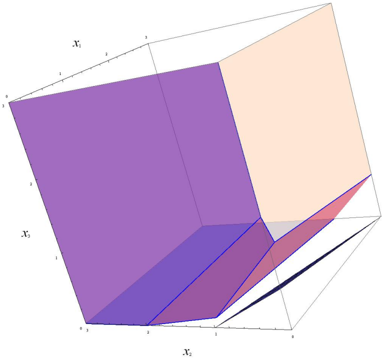


30 рублей

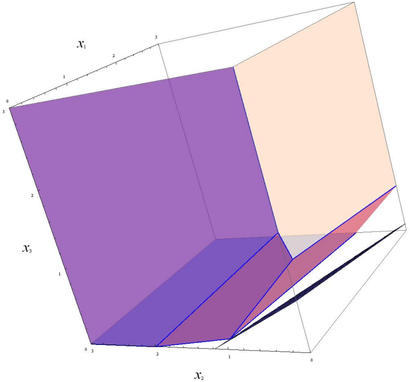


35.5(5) рублей — самый дешёвый рецепт

Линейное программирование

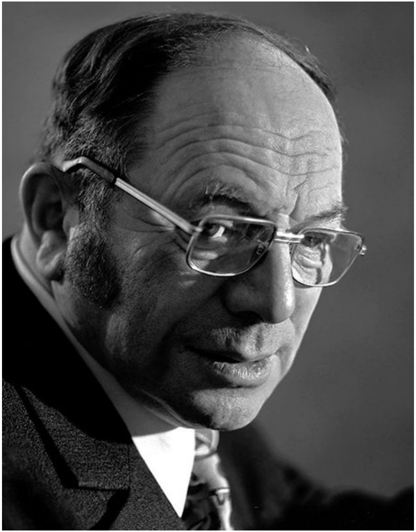


30 рублей



35.5(5) рублей — самый дешёвый рецепт

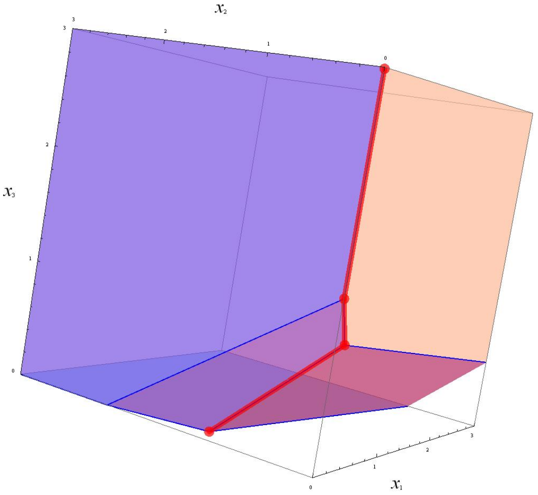
Линейное программирование



Леонид Витальевич Канторович (1912–1986), выдающийся советский математик и экономист

Линейное программирование

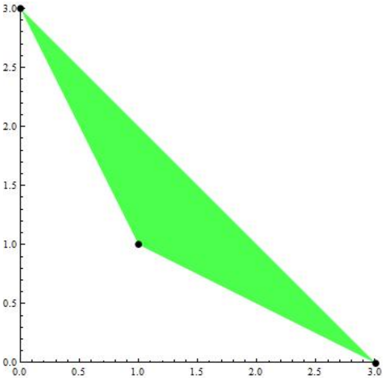
Симплекс-метод



Многоугольники Ньютона

Уравнение

$$x^3 + xy + y^3 = 0$$

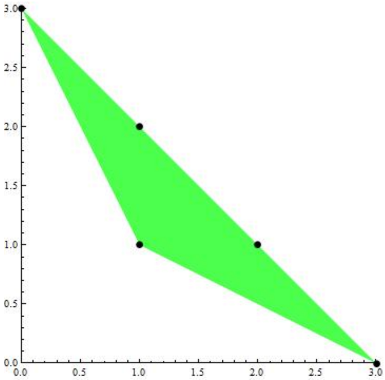


многоугольник Ньютона

Многоугольники Ньютона

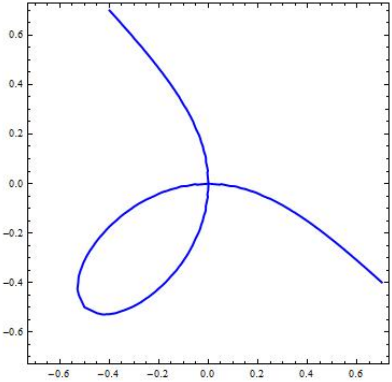
Уравнение

$$x^3 + xy + y^3 + x^2y + xy^2 = 0$$

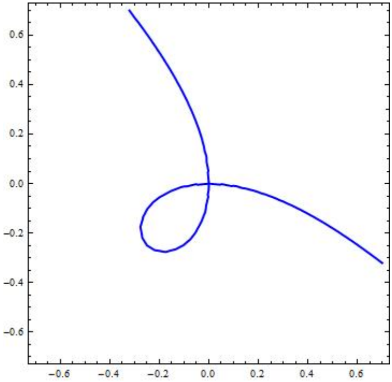


многоугольник Ньютона

Многоугольники Ньютона

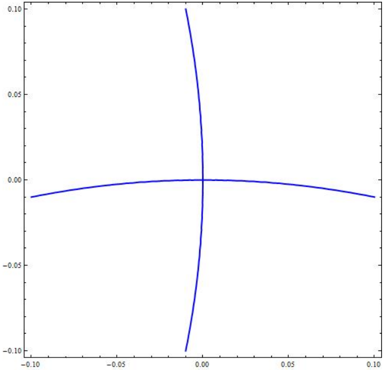


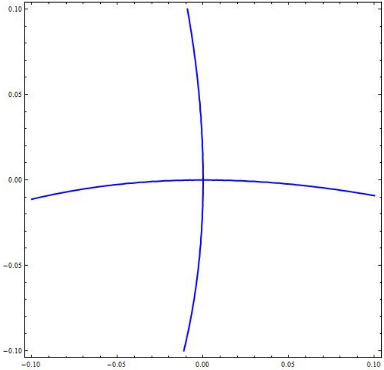
$$x^3 + xy + y^3 = 0$$



$$x^3 + xy + y^3 + x^2y + xy^2 = 0$$

Многоугольники Ньютона





$$x^3 + xy + y^3 = 0$$

в большем масштабе

$$x^3 + xy + y^3 + x^2y + xy^2 = 0$$

в большем масштабе

Многоугольники Ньютона

Вывод

Многоугольники Ньютона хорошо описывают геометрию алгебраических кривых.

Замечание

Для алгебраических уравнений от большего числа переменных тоже можно определить многогранники Ньютона.

Литература

Многоугольники

Э. Эбботт, Д. Бюргер. *Флатландия. Сферландия.* М.: Мир, 1976

Эйлер, Гаусс,...и их открытия

С. Г. Гиндикин, *Рассказы о физиках и математиках.* - 3-е изд.,М.: МЦНМО, 2001 http://www.mccme.ru/free-books/gindikin/contes.pdf

Четвёртое измерение

Р. Хайнлайн, *И построил он дом...* в сборнике "И грянул гром", М.: Молодая гвардия, 1976

Правильные многогранники

Е. Ю. Смирнов, *Группы отражений и правильные многогранники.* М.: МЦНМО, 2009
http://www.mccme.ru/free-books/dubna/smirnov-reflections.pdf

Многогранники Ньютона

В. А. Тиморин. А. Г. Хованский, *Многогранники и уравнения.* Математическое просвещение. Сер. 3, 2010. № 14. С. 30-57
http://www.mccme.ru/free-books/matpros/mpe.pdf